CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Solution directe du problème résolu par M.* Bertrand. Note de M. **Désiré André**.

« On suppose que deux candidats A et B soient soumis à un scrutin de ballottage. Le nombre des votants est $\alpha + \beta$. A obtient α suffrages et est élu, B en obtient β. On demande la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, le nombre des voix de A ne cesse pas une seule fois de surpasser celles de son concurrent.

» Le nombre des événements *possibles* est évidemment celui des permutations que l'on peut former avec α lettres A et β lettres B.

» Appelons $Q_{\alpha,\beta}$ le nombre des événements *défavorables*. Les permutations qui leur correspondent sont de deux sortes : celles qui commencent par B, celles qui commencent par A.

» Les permutations défavorables commençant par B sont en nombre égal au nombre des permutations que l'on peut former avec α lettres A et $\beta - 1$ lettres B, car il suffit évidemment d'y supprimer la lettre initiale B pour obtenir ces dernières.

» Les permutations défavorables commençant par A sont en même nombre que les précédentes, car on peut, par une règle simple, les associer, chacune à chacune, aux permutations formées avec α lettres A et $\beta - 1$ lettres B.

» Cette règle se compose de deux parties :

» 1° Étant donnée une permutation défavorable commençant par A, on y supprime la première lettre B qui enfreint la loi du problème, puis on échange entre eux les deux groupes séparés par cette lettre : on obtient ainsi une permutation, parfaitement déterminée, de α lettres A et $\beta - 1$ lettres B. Soit, par exemple, la permutation défavorable AABBABAA, de cinq lettres A et de trois lettres B; en supprimant le premier B qui enfreint la loi, on sépare les deux groupes AAB, ABAA; en échangeant ces groupes entre eux, on obtient la permutation ABAAAAB, formée de cinq lettres A et deux lettres B.

» 2° Étant donnée une permutation quelconque de α lettres A et $\beta - 1$ lettres B, on la parcourt, de droite à gauche, jusqu'à ce qu'on obtienne un groupe où le nombre des A dépasse d'une unité celui des B; on considère ce groupe et celui que forment les lettres placées à sa gauche; on intervertit ces deux groupes, en plaçant entre eux une lettre B : on forme ainsi une permutation défavorable commençant par A et parfaitement déterminée. Soit, par exemple, la permutation ABAAAAB; en opérant comme on vient de le dire, on la partage en deux groupes ABAA, AAB; en intervertissant ces groupes et plaçant entre eux une lettre B, on forme la permutation défavorable AABBABAA.

» Il résulte de tout ce qui précède que le nombre total des événements défavorables est le double du nombre des permutations que l'on peut former avec α lettres A et $\beta - 1$ lettres B; c'est-à-dire que

$$Q_{\alpha,\beta} = 2\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!(\beta-1)!}.$$

» Si l'on désigne par $P_{\alpha,\beta}$ le nombre des événements favorables, on a donc

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!} - 2\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\,(\beta-1)!},$$

ou bien

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\,\beta!}(\alpha-\beta).$$

» Par suite, la probabilité demandée est

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\text{ »}$$

M. M.-E. **Roger** adresse une autre démonstration de la formule donnée par M. Bertrand.

M. **Bertrand** présente, à propos de ces diverses Notes, les observations suivantes :

« La réponse élégante faite par M. André à la question que j'avais proposée, et le théorème remarquable par lequel M. Émile Barbier généralise celui que j'avais donné me fournissent l'occasion de revenir sur ce théorème lui-même.

» Proposé comme exercice curieux de calcul et de raisonnement, il a, en réalité, une plus haute portée. Il se rattache à la question importante de la durée du jeu, traitée par Huygens, Moivre, Laplace, Lagrange et Ampère.